

# 記數法的歷史及其對教學的啓示

胡重光

摘要: 兒童對進位、退位難以理解, 是因為“位值”的概念不科學。考察記數法的歷史可以發現, 記數法的發展經歷了一個由不用計數單位, 到採用計數單位, 再到省略計數單位的“否定之否定”的過程; 計數單位是理解“十進位值制記數法”的關鍵; 記數法與記量法是一致的。小學整數記數法和計算的教學如果按照“數碼—記量法和量的計算—保留計數單位的多位數及其計算—省略計數單位的多位數及其計算”的步驟進行, 將使兒童很容易理解, 並節省大量的教學時間。

關鍵詞: 記數法, 位值制, 計數單位, 記量法。

記數法是最基本的數學知識之一, 它是整數和表示為小數的有理數的集合的基礎, 整數和小數的四則運演算法則都是基於記數法的。

目前世界通用的“十位進位值制記數法”非常巧妙: 只用10個符號就可以把無論多大的數記下來, 十分簡捷, 又便於計算, 因此為世界各國所採用, 成為整個數學的基礎。

通常認為, 這種記數法的最基本的特點就是採用了“位值原則”。所謂“位值原則”, 裘光明主編的《數學辭海》所下的定義是: “同一個數字由於它在所記的數裏的位置不同, 所表示的數也不同。也就是說, 每一個數字除了本身的值以外, 還有一個‘位置值’。”<sup>[1]</sup> 美國數學教學法專家 J. W. 海敦斯 (J. W. Heddens) 說: “位值原則使十進命數法遠遠優於其他任何命數法。”<sup>[2]</sup> “位置值”也簡稱“位值”。然而, 不幸的是, 如此重要的“位值”卻是一個兒童很難理解的概念, 中外都是如此。J. W. 海敦斯在談到位值時說: “對於兒童來說, 這是一個抽象的、很難理解的概念。”<sup>[2]</sup> 為了幫助兒童理解這一概念, 小學數學教學採用了多種直觀教具、學具, 如中國的“數位器”、美國的“位值箱”等。即使如此, 兒童仍常常出現把“一十五”寫成“105”, 把  $37 + 25$  的結果算成 512 之類的錯誤, 在整數、小數加減法學習中的主要錯誤也出在“進位”和“退位”上。

多年來我們一直認為這一困難是無法改變的, “位值”本來是兒童難以理解的。但是“位值”這一概念並不是從這一記數法產生時就有的, 而是到近代才提出的, 其目的也是為了說明為什

麼同一數字位於不同的“數位”就有不同的值。既然這一概念如此難理解，那麼我們能否給出另一種更容易理解的說明呢？甚至我們有理由懷疑，“位值”的概念是否科學、合理。

記數法是人類最古老的文明之一，它的演進經歷了漫長的歷史時期。J. 皮亞傑 (J. Piaget) 有一個重要的觀點：兒童思維的發展和科學的發展之間存在著類似的發展過程 [3]。因此，考察一下記數法產生和發展的歷史，或許會對我們有所啓發。

人類最初的記數法，按使用的符號的性質，可大致分為三類。第一類是用專門的符號來記數的，古埃及、巴比倫和瑪雅人的記數法都屬於這一類。

埃及：  
  
 1          10          100          1000          10000          100000

IIII 〰 〇〇〇〇 4 1 3 (古埃及數字是從右往左寫的)

巴比倫：  
  
 1          10          60          1 4 2

巴比倫人的文字是刻在泥板上的，因此呈楔形，歷史學家稱之為“楔形文字”。有趣的是1和60的符號只有大小的不同。古埃及的記數法是以10為基的，巴比倫的記數法則是以60為基的。瑪雅人的記數法的主要特點是使用了一個專門代表20的符號，形狀像一個人的面部，並且是以20為基的。所有這些符號都是特別造出來用於記數的。

第二類是用現成的字母來記數，古希臘、羅馬、印度的記數法都屬於這一類。

希臘字母有27個，古希臘人用頭9個字母代表1到9的數，中間9個字母代表10到90的數，末9個字母代表100到900的數。

古羅馬人的記數法現在還常用來標順序，他們只用7個大寫字母記數，並有一套記數規則：相同的字母排在一起表示相加；較小的數排在較大的數的左邊表示相減，排在右邊表示相加；在一串數字的右下方加一個m，則表示把這個數擴大1000倍。例如29635用古羅馬記數法寫成：XXIX<sub>m</sub>DCXXXV。

M. 克萊因 (M. Kline) 的《古今數學思想》上載有西元前三世紀後印度的一套記數符號：

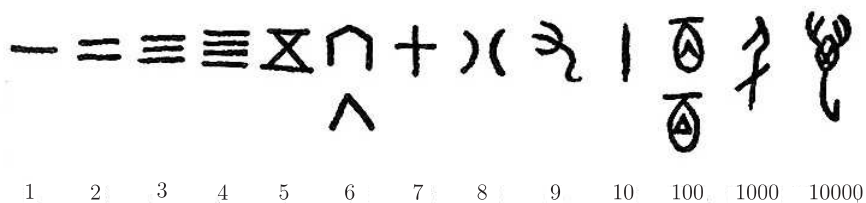
— = ≡ √ ∩ ∪ ∩ ∪ ∩ ∪ ∪ ∪ ∪ ∪  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60

他認為“這一組記號的出色之處是它給1到9的每個數都有單獨的記法”，並推測“這種寫法也許是由於以該數名稱的第一個字母來代替它而產生的。” [4] 如果他的推測正確，則這種記數法也屬於第二類。

這兩類記數法的一個共同特點是，都用重複書寫某一個符號的方法來表示更大的數。例如要表示500，就要把表示100的符號寫5次。這種方法有兩個大缺點：一是書寫很長，很大的數幾乎難以記數；二是計算非常困難，即使專家也很難掌握。

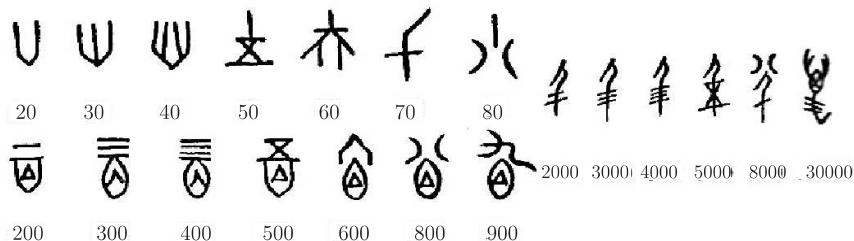
第三類是中國古代的記數法。中國古代的記數法在國外的數學史著作中介紹不多，M. 克萊因的《古今數學思想》完全忽略了中國數學，他認為“他們的工作對數學思想的主流沒有重大影響。”<sup>[4]</sup> 但是，就記數法來說，他忽略的恰好是最重要的一種。

據錢寶琮的研究<sup>[5]</sup>，殷墟甲骨文中有以下13個記數符號：



前面四個是專門的記數符號，五、六、七、八、九都是假借字，即借用漢字來表示數。如 五 原是“午”字。百、千二字來歷不明，“萬”字是“叢”的初字，像一個蠍子。“6”和“100”都有兩種寫法。

十、百、千、萬的倍數的記法如下：



20、30、40的記法是將表示10的符號重寫，與第一類記數法的記法相同。但50、70、50~80的記法則與第一類記數法不同，明顯是兩個符號的合文。對比前面的100、1000的記法可看出，幾百、幾千、幾萬的記法也是合文，即用1~9的數字與表示百、千、萬的符號合起來記數，寫成一個單字，但讀起來還是兩個音節，例如殷墟甲骨文“八日辛亥 伐，人 千 百 五 十 人”中的數字是二千六百五十六。

與前兩類記數法比較可以發現，中國古代的記數法與古埃及的記數法雖同為十進，但在古埃及記數法中，十、百、千、萬的符號是數字，而在中國古代記數法中，這些符號是計數單位。中國古代的記數符號分為兩類：數字符號和單位符號。10以上的數要用兩種符號結合起來記，如“500”記為“五百”不用把“百”的符號連寫五次。這樣，不但記數很簡單，而且計算時只要對相同計數單位的量數作計算就可以了，所有的計算都歸結為10個數碼的計算，十分簡便。在甲骨

文中，數字符號和單位符號是合寫在一起的。以後的記數法已不用合文，例如記8620爲“八千六百二十”。除了沒有“零”外，與現代漢語的記法已沒有什麼區別。

中國很早就有了系統的計數單位，《國語·鄭語》記載史伯對鄭桓公說：“合十數以訓百體，出千品，具萬方，計億事，材兆物，收經入，行姦極。”<sup>[6]</sup>其中十、百、千、萬、億、兆、經、姦都是十進的計數單位。後來又將萬、億、兆、經、姦等大單位改爲萬進。採用這種記數法，很自然地把一個數位的各計數單位按從大到小的順序排列，很有規律。

約到西元前二世紀之後，中國的記數法又有了新的發展，出現了算籌記數法。這種記數法由於採用小竹棍來擺數位，其記數符號與以前的很不相同，並有縱式和橫式兩種，記數時縱式和橫式交替使用：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱式						⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
橫式	—	==	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥	⊥	⊥

它的一個重大進步是省略了計數單位。例如八萬六千零二十一用算籌擺出來是⊥⊥⊥ ⊥ =|，百位上是空位，不放算籌。把它與86021比較可以發現，算籌記數除了沒有數碼0之外，與現在的十進位值制記數法只有符號不同這一個差別。可以說，它就是一種十進位值制記數法。<sup>[註]</sup>

算籌記數法還有一個優點：由於大於“5”的數字都包含表示“5”的符號，所以20以內的進位加法很容易計算，而對於現代十進位值制記數法來說，這是小學數學的難點。

由算籌記數法又發展出珠算（珠算產生的年代已很難確定，中國有關算盤的記載最早出現在三世紀前後的《數術記遺》一書），珠算的記數法與算籌記數法基本相同，但計算速度極快，是中國古代最優秀的計算工具，不但至今仍在使用，它在數學教育上的價值更是寶貴的、難以替代的。

回顧記數法的發展過程我們看到，記數法經歷了最初不用計數單位，進而採用計數單位，最後又省略計數單位這樣一個“否定之否定”的發展過程。計數單位的使用使記數法科學化，而此後的省略計數單位不但沒有失去計數單位的作用，而且使記數法大大簡化了，達到了完美的地步。可以說，計數單位在記數法的發展中起到了決定性的作用。

進一步還可發現，記數法與記量法是一致的，計數單位相當於計量單位。例如長度的記量就是先確定一系列長度單位：毫米、釐米、分米、米……以及相鄰單位的進率。如果規定最小單位爲釐米，相鄰單位的進率爲10，則記10米以下的長度時，也可以像省略計數單位一樣省略長度單位，例如3米5分米5釐米記爲355也是清楚明白的。

註：算籌記數，古人有規定：“一縱十橫，百立千僵。千、十相望，萬百相當。滿六以上，五在上方。六不積算，五不單張。”（《夏侯陽算經》）即用算籌擺數時，縱式和橫式要交替使用。因算籌用空位表示零，有時不夠明顯。但若看到兩縱式或兩橫式相鄰，就知其間有一空位了。

這時，若要把兩個長度相加，只要對好“位”，就像兩個整數相加一樣。如果兒童明白了這些規則，他們就懂得了355這個長度中為什麼兩個5所代表的長度不相同，也不會把1分米5釐米寫成105。

以上的事實和分析啓示我們，計數單位是理解多位數記數法和四則運算法則的關鍵。由此我們可以得出，多位數的認識和四則運算的教學應按以下步驟進行：

1. 首先學習0至9的數碼。

2. 其次學習進率為10的常見量的記量法，例如貨幣、長度。記量法比記數法更為具體，是看得見、摸得著的，又與兒童的生活實際緊密聯繫，因此兒童更易理解。並且學習記量法也為數碼及其計算提供了應用的實例，使兒童看到數的用處，增強他們的學習興趣。

3. 再次是學習保留計數單位的多位數及其計算。例如35應先寫作3拾5個，在計算時也帶著計數單位進行。

4. 最後，在兒童對這種帶單位的數及其計算已熟悉後，再學習省略單位的多位數及其計算。

有了第二和第三步的學習，兒童將很容易理解所謂“位值”和“進位”、“退位”。實際上“位值”的概念也就不需要了，而“進位”和“退位”就相當於名數的“聚”和“化”。原來的抽象性完全不存在了，變得具體、簡單、明白了。這一改變使整數記數法及其計算的教學真正科學、易懂，能節省大量時間。既然“位值”已是不必要的概念，“十進位值制記數法”的名稱也應改變，比較恰當的名稱或許應該是“省略計數單位的十進記數法。”

## 參考文獻

1. 裘光明，數學辭海（第一卷），山西教育出版社，太原，2002.
2. J. W. 海敦斯著，程子明，陳夫義等譯，美國現代小學數學，華中師範大學出版社，武漢，美國，1989.
3. J. 皮亞傑，R. 加西亞著，薑志輝譯，心理發生和科學史，華東師範大學出版社，上海，2005.
4. M. 克萊因，古今數學思想（第一卷），上海科學技術出版社，上海，美國，1979.
5. 錢寶琮，中國數學史，科學出版社，北京，1964.
6. 國語·鄭語，上海書店1987年版，第186頁.

—本文作者現任教湖南省第一師範學校教育科學研究所—