

# 未進過學校的數學天才巴斯卡

張小平

在世界數學史上，公認最偉大的三位數學家是阿基米德、牛頓和高斯。18世紀百科全書派的數學家達朗貝爾 (Jean Le Rond d'Alembert) 曾經讚譽另一位偉大的數學家巴斯卡 (Blaise Pascal)，是“從阿基米德過渡到牛頓的中間橋樑”。

## 聰慧的少年

巴斯卡是法國的數學家、物理學家和思想家，1623年6月19日出生於法國的克萊蒙費朗市 (Clermont—Ferrand)。三歲時，母親去世。他的父親艾基納 (Étienne Pascal) 擔任克萊蒙費朗市議會的議員，是一位具有自由主義思想的知識份子，他熱愛科學，博學多才，尤其擅長數學，是一位業餘數學家，著名的“巴斯卡螺線”就是他的發現。他平時為人謹慎，工作勤奮，善於理財和悉心照料兒女。妻子去世後，他自然承擔起了對孩子的啓蒙教育。他的教育觀念奇特，教學方法注重問題解決，而不是材料的灌輸，從而培養了巴斯卡一種好奇和探究的精神，動手和實驗能力也相當出色。少年的巴斯卡雖然體弱多病，但是天賦極高，擅長辭令，幽默風趣，靈氣蕩漾於清秀的眉宇之間。他抓緊時間如饑似渴地讀書學習，顯示出對於研究自然現象的興趣和卓越才能，七、八歲時，就在父親的指導下學完了小學的全部課程。以後，終身也未進入任何其他學校學習。

1631年，艾基納爲了三個兒女的教育，他毅然辭去了議員職務，舉家遷居到法國科學文化的中心巴黎。兩年後，十一歲的巴斯卡，寫出了第一篇論文《論聲音》，闡述了物體振動發聲的原理。但是，父親一直有個錯誤想法，認爲兒童過早地學習數學對頭腦發育不利，所以一直沒有主動地向巴斯卡傳授數學知識，也不准許他閱讀任何數學書籍。直到1635年，十二歲的巴斯卡看到父親在捧讀一本幾何書。他便好奇的問父親，什麼是幾何？父親說，幾何可以教人畫出準確而美觀的圖形，並且順便向巴斯卡介紹了一些簡單的幾何學知識。不想這次卻引起了巴斯卡學習數學的興趣。他趁父親不在的時候，翻出父親的幾何書，邊閱讀邊用鵝毛筆在紙上畫幾何圖形，表現出了對數學學習的非凡才能，很快就獨自發現了“任何三角形的三個內角的和是  $180^\circ$ ”這

個定理。當他把論證的結果告訴父親時，父親竟然激動得流出了眼淚。於是，父親拿出歐幾里得 (Euclid) 的《幾何原本》(Elements)，親自指導巴斯卡閱讀，使巴斯卡的數學潛質得以及時開發。

## 進入數學殿堂

巴斯卡的全家移居巴黎後，他的父親很快就成為當時著名數學家 and 修道士馬林·梅森 (Marin Mersenne) 主持的“梅森學院”的成員。梅森在當時的歐洲科學界是一位獨具魅力的人物。他雖然從事宗教事業，但是卻熱情崇尚科學，為在教會中捍衛科學和真理作了很多有益的工作。他交際廣泛，對人熱情誠摯，歐洲的很多科學家都坦誠地與他交流科學研究的成果，他卻將得到的科學進展的最新資訊及時的傳播出去，他也因此成為了聯繫科學家的紐帶。1626年，梅森乾脆在他的修道院裏闢出專用場所，成立了科學家聚會和交流資訊的機構，取名為“梅森學院”。一批傑出的科學家每週來此聚會，自由討論大家關心的數學和物理問題。1666年後，“梅森學院”由民間學術組織發展成為官方的科學研究機構，“梅森學院”因此成為法國科學院的前身。

1637年，巴斯卡十四歲時，被允許隨父親參加梅森學院的學術活動。從而，他接觸到了當時著名的數學家，如費馬 (Fermat)、羅伯瓦 (Roberval)、伽利略 (Galileo Galilei)、德紮格 (Desargues)、笛卡兒 (Rene Descartes) 和梅森等人，從此，眼界大開，不僅領略到了數學的奧秘，而且學識大有長進。到了十六歲時，他在梅森學院的聚會上，就能發表獨立的學術觀點了，時常能引起其他數學家的思想波瀾。在這期間，他尤其得到了德紮格的賞識和指導，從而很快掌握了德紮格的射影幾何思想。

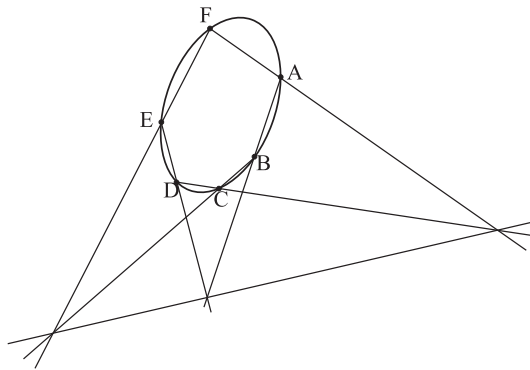
## 創立射影幾何的偉大貢獻

通過中心投影或者平行投影，把一個圖形變換成另外一個圖形，叫做射影變換。射影幾何就是研究在射影變換下圖形不變性質的幾何學。射影幾何的奠基者正是德紮格和巴斯卡師生兩人。

1637年6月，德紮格出版了《關於錐體與平面相交所得曲線的投影》(Brouillon project d'une atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plan) 一書，開創了射影幾何研究的新領域。德紮格首先引進了無窮遠點的概念，把它看成是平行線的交點，由此得出同一平面上任意兩條直線都相交的結論。這成為建立射影幾何理論體系的基石。進而，德紮格又引入了無窮遠直線的概念，並且得出平行平面都相交於同一直線的結論。在德紮格的理論中，平行被看作是相交的特殊情形，原來普通點和普通直線的結合關係依然成立。射影變換的一個重要性質，就是點和直線的結合關係不改變。德紮格用射影幾何的思想重新審視圓錐曲線，取得了全

新的結論，如直線可以看作具有無限長半徑的圓周；焦點重合的橢圓退化為圓；焦點之一在無窮遠點的橢圓是拋物線；圓不僅可以變換為橢圓，而且可以變換為開口的拋物線或雙曲線，這時，曲線在無窮遠點處仍然是封閉的。

十六歲的巴斯卡非常虛心地向德紮格請教。經過交流和思考，他深刻地理解了射影幾何的基本理念，尤其受到圓可以變換成圓錐曲線的啟發，發現了著名的巴斯卡定理：“如果一個六邊形內接於一圓錐曲線，每兩條對邊相交於一點，則這三點在同一條直線上。若這個六邊形的對邊兩兩平行，則它們在無窮遠直線上”。



巴斯卡的神奇六邊形

巴斯卡首先證明了該定理對圓是成立的。由於在射影變換下，點和直線的結合關係不變，圓及其內接六邊形變換成圓錐曲線及其內接六邊形，此時，六邊形的對邊仍將交於一條直線上的三點，所以，該定理對所有圓錐曲線都成立。巴斯卡的這個定理，揭示了圓錐曲線上六個點的射影相關性，精妙無比，是射影幾何中內涵最為豐富的定理之一，它的推論多達 400 餘條，例如：(1) 如果一個三角形內接於一圓錐曲線，則其各頂點處的切線與對邊的交點共線。(2) 若五邊形 ABCDE 內接於一圓錐曲線，則 AB 和 DE 的交點，BC 和 EA 的交點，CD 與 A 點處的切線的交點，三點共線。(3) 內接於一圓錐曲線的四邊形的兩對對邊，連同對著的頂點出的兩對切線，交於四個共線點。實際上，巴斯卡定理的逆定理也是成立的，但是，當時巴斯卡沒有發現。

巴斯卡的父親興奮地把這篇論文寄給法國數學界的權威笛卡兒審閱，但是，笛卡兒居然不相信如此偉大的成就出自於一個十六歲的少年之手，而認為這是巴斯卡父親的代筆。巴斯卡從此對笛卡兒也產生了厭惡的情緒，對他開創的解析幾何理論不屑一顧，甚至在以後的數學論文中，也拒絕採用笛卡兒發明的數學符號。這種感情用事的結果，還是影響到了巴斯卡學術成就的進一步深化。因為巴斯卡和德紮格的研究方法仍然屬於傳統的綜合法，研究範圍還只停留在對幾何學的定性研究上，當時他們都還沒有意識到，運用解析法來研究射影幾何才能取得根本的進展。而笛卡兒創造的解析幾何理論引入了變數的思想，開創了用代數方法研究幾何的新方

法。當時科學技術的發展更需要解析幾何這樣的有力數量工具，能夠迅速的計算出數量結果。正因為它的應用廣泛，才使得與它幾乎同時產生的射影幾何相形見绌。正是因為巴斯卡的偏見，使得他在射影幾何方面的研究停滯不前，而射影幾何的深入研究就此中斷了幾十年。事實證明，射影幾何理論的最後完成，正是借助了解析幾何的思想。

與笛卡兒的態度相反，德紮格卻非常欣賞巴斯卡的才華，稱定理裏的六邊形是“巴斯卡神秘六邊形”。並建議巴斯卡將阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 在《圓錐曲線》(Conics) 一書中的命題都用射影幾何的方法推導出來。巴斯卡欣然接受了這個建議，於1640年12月，寫成《圓錐曲線論》(Essay pour les coniques) 一書，使得射影幾何的研究取得了空前的進展。

距當時一千多年前的數學家帕波斯在研究阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》時，提出並且解決了一個問題：由點 C 向四條定直線引交線 CB, CD, CF, CH, 所構成的角為定值，交點分別為 B, D, F, H, 則滿足  $CB \cdot CF = \lambda CD \cdot CH$  的點 C 的軌跡 (其中  $\lambda$  是常數) 是圓錐曲線。1637年，笛卡兒在研究“帕波斯問題”時，創立了用代數方法研究幾何的思想。笛卡兒在《幾何學》中，從這一問題入手，深刻闡發了座標幾何的思想，提出了平面坐標系的概念，從而把帕波斯猜想問題，轉化成爲求一個含有兩個變數  $x$  和  $y$  的代數方程問題。解析幾何由此開闢了幾何研究的新時代。

從思想的深刻性來講，射影幾何和解析幾何都是當時幾何研究的高峰。但是，就通俗性和實用性而言，射影幾何的光輝還是被解析幾何掩蓋了。巴斯卡爲了挑戰笛卡兒的解析幾何理論，1648年3月，他用純粹射影幾何的思想也徹底解決了“帕波斯問題”，顯示了射影幾何所具有的廣闊研究空間。

## 研製計算機械

1642年，巴斯卡剛滿19歲，他的父親在皇家稅務部門擔任統計官員，爲了減輕父親在稅務徵收工作中的計算負擔，他打算設計製造一種機器，通過齒輪運動實現加減法運算。在研製過程中，巴斯卡提出：人的某些思維過程與機械的運算過程沒有本質區別，因此，用機械化運算模擬人的思維活動決不僅僅是設想。1645年，他便製造出了被稱爲世界上第一台的電腦，並在1649年5月22日獲得了由皇家授予的專利權，因此而聞名於世。後來知道，早在1623年，德國數學家卡什爾已經設計製造出了齒輪式電腦，只是卡什爾沒有巴斯卡的名氣大，一直沒人提起這件事情而已。不過，巴斯卡在研製過程中提出的著名論斷卻開了人工智慧之先河。1971年誕生的 PASCAL 語言，就是爲了紀念這位電腦先驅，以巴斯卡的名字命名的。

## 在物理學上的建樹

1646年，巴斯卡又把他的注意力轉向流體力學和真空問題的研究。他在研究液體平衡的一般規律過程中，發現了“加在密閉容器內流體任何一部分的壓強，必然以同樣的大小向流體各

個方向傳遞”的規律，這就是流體靜力學中最基本的原理——巴斯卡定律。在此基礎上，他發明了注射器，提出了連通器守則和水壓機工作原理。他關於真空問題的研究也領先於他人，1647年10月，發表了《關於真空的新實驗》(Experiences nouvelles touchant le vide) 的研究報告，極大地提高了他在物理界的聲望。國際單位制中壓強的單位為“帕”，也是為紀念巴斯卡的功績而規定的。

1648年，為了檢驗物理學家托里拆利 (Torricelli) 等人的氣壓理論，巴斯卡改進了氣壓計和試驗手段，還和笛卡兒坐到一起，共同討論這個問題。儘管他們的觀點不盡一致，他還是吸納了笛卡兒的合理化建議，在不同的高度，反復對實驗結果進行觀察和比較。他委託他的姐夫攀上克萊蒙費朗的多姆山坡，認真地進行了實驗，從而，證明空氣有壓力的事實，並且證實了大氣外層是真空，否定了笛卡兒認為的整個空間都充滿物質的論點。巴斯卡還是世界上第一個計算出空氣重量和密度的人。他1654年完成的《論液體平衡和空氣的重量》(Traites de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air) 是多年實驗和思考的結果，無可爭議地成為17世紀的科學經典名著之一。

## 創立機率論

1654年，巴斯卡和數學家費馬頻繁通信，從他們共同討論解決一個上流社會為賭博而產生的問題，進而深入探討了算術、組合分析和機率計算等方面的理論研究成果，成為數學史上的美談，開了研究機率論的先河。

兩個賭徒保羅與梅爾賭錢，每人拿出6枚金幣。比賽開始後，保羅勝了一局，梅爾勝了兩局之後，一件意外的事件中斷了他們的賭博。於是，他們各自提出了分配這12枚金幣的方案。保羅認為，根據勝負的局數，他應該得總數的 $\frac{1}{3}$ ，即4枚金幣，梅爾得總數的 $\frac{2}{3}$ ，即8枚金幣。但精通賭博術的梅爾認為，他贏得全局的可能性要大於保羅，所以他應該得到全部金幣。兩人各不相讓，只好請求巴斯卡來評判。

巴斯卡認為：賭博再進行一局，如果梅爾勝，可以得到全部金幣（記為1）；如果保羅勝，那麼兩人各勝了兩局，應各得金幣的一半（記為 $\frac{1}{2}$ ）。因為這一局他們勝負的可能性是相同的，因此，梅爾得金幣的可能性應該是兩種可能性大小的一半，即 $(1 + \frac{1}{2}) \div 2 = \frac{3}{4}$ ，保羅得金幣的可能性則為 $(0 + \frac{1}{2}) \div 2 = \frac{1}{4}$ 。所以梅爾分9枚金幣，保羅分3枚金幣。

隨後，巴斯卡就將這個問題寫信告訴了數學家費馬，徵求他的意見。費馬經過考慮後，完全贊同巴斯卡的評判。費馬是這樣認為的，如果再玩兩局，會出現四種可能的結果：(梅爾勝，保羅勝)；(保羅勝，梅爾勝)；(梅爾勝，梅爾勝)；(保羅勝，保羅勝)。其中前三種結果都決定梅爾整盤勝出，只有第四種結果保羅才能整盤勝出。所以梅爾取勝的機率為 $\frac{3}{4}$ ，保羅取勝的機率為 $\frac{1}{4}$ 。

巴斯卡與費馬在解決這個問題中，雖然沒有明確提出機率的定義，但是，他們不約而同的規定，輸贏的情況數與所有可能情況數的比值，由此又繼續研究了這類隨機事件的更一般的規律，所以，機率論的研究自然被認為是從巴斯卡與費馬開始的。作為機率論研究的成果，巴斯卡在 1653 年寫成了《論算術三角形》(Traite du triangle arithmetique)，通過對特殊機率問題解法的討論，深入到關於算術級數的研究領域，由此建立了十九個有關組合論的定理。在這本著作中提到的“巴斯卡三角形”直接啓發牛頓，發現了二項式定理。另外，巴斯卡還首次科學地闡述了數學歸納法的數學要旨，由此將遞推的推理方法系統地應用於數學研究中，因此，他又被認為是數學歸納法的最早發現者。《論算術三角形》經過費馬修改定稿，直到 1665 年才出版。

## 開微積分研究之先河

1657 年，巴斯卡把大部分時間又花在完成“不可分量”理論的研究上。義大利數學家卡瓦列利 (Cavalieri) 提出三角形的面積可通過劃分為無數平行直線的辦法來計算。早在 1654 年，巴斯卡在《數字冪求和》(Potestatum numericarum summa) 的論文中就曾經提到過不可分量的概念。通過對義大利數學家卡瓦列利思想的研究，巴斯卡擺脫了卡瓦列利方法中那些邏輯上的缺陷，他認為：一條線不是由點構成的，而是由無數條短線構成；一塊面不是由線構成，而是由無數個小塊面構成；一個立體不是由面構成，而是由無數個薄薄的立體構成。遵循這一思想線索，巴斯卡寫成了《幾何學本義》(De l'esprit géométrique) 一書，運用無窮小理論研究幾何，顯示了很高的水準，他看到了無窮大和無窮小互相呈倒數關係，求出了曲線  $y = x^n$  下面曲邊梯形的面積 (相當於積分  $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ )。

1658 年初的一個夜晚，巴斯卡因為牙痛而不能入眠，乾脆起床思考數學問題，他認為求曲邊三角形面積的方法，經過推廣改進，還能擴大其應用範圍，甚至完成不可分量計演算法的全部工作。因此，經過八個晝夜的工作，對擺線的有關問題進行了細緻入微的研究。擺線是指沿直線滾動的圓周上一點的運動軌跡，巴斯卡創造性地將運動和辯證法思想引入幾何問題的研究中，揭示出廣義擺線與橢圓曲率相等的定理，解決了關於擺線的許多具體問題。

爲了取得數學界的認可，1658 年 6 月，巴斯卡將自己研究的成果，諸如求曲線所圍成的面積問題，求物體的體積問題，確定平面圖形的重心問題，求曲線的長度問題等，通過微解的方式向數學界公佈。當時，很多第一流的數學家懷著極大的興趣關注著這場挑戰，牛津大學教授沃利斯 (Wallis)、數學家惠更斯 (Christiaan Huygens) 等很多著名科學家都親自提交了論文，予以解答。但是，沒有人全部做對。

1658 年 10 月，巴斯卡用嚴謹而明晰的幾何語言，陸續以公開信的形式解答了自己所提出的問題，1659 年 2 月，集成《A. 戴東維爾的某些幾何發現的信件》(Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie) 一書發表。巴斯卡的這項成就

是從不可分量計算到微積分計算的一個重要過渡，從理論上深化了不可分量的概念，提出了定積分的思想，在具體計算方法中已經顯露出部分積分法的端倪。巴斯卡的工作為通往微積分的華麗殿堂鋪平了道路，特別是巴斯卡獨創的“特徵三角形”方法，對微積分的創建貢獻至偉。微積分學的創建者之一萊布尼茨曾說過，當他讀到巴斯卡“特徵三角形”的論述時，就像觸電一樣，一下引發了建立微積分理論的靈感。但是，巴斯卡卻清晰的認識到，他在這方面的研究是不徹底的，這也成為他數學研究生涯中的一個疙瘩。當有人要求他解釋無窮小量這些概念的準確含義時，他也只好用“心領神會”來搪塞。

## 宗教情結和文學成就

巴斯卡如此豐富的數學研究成果，幾乎都是在與疾病不斷鬥爭的情況下所取得的。從十八歲起，他就沒有一天不在病中。1659年2月，巴斯卡的病情加重，已經不可能從事科學研究的工作，但是，他卻不放棄虔誠的宗教活動，全身心的投入祈禱與慈善的工作。這是因為有一次，他乘馬車外出，馬受驚失去控制，馬車衝過納伊橋的欄杆，墜入河中，這時，韁繩突然掙斷，巴斯卡僥倖奇跡般地得以逃生。他把這次驚險經歷歸結為“神的啓示”，並且終身不忘。彌留之際，最後一句話還是“願上帝與我同在”。巴斯卡認為，宗教與科學並不是對立和矛盾的，它們只不過處於不同的層次上面，它們不會互相影響，所以，當科學研究佔據他的主要精力時，宗教仍然可以成為他心中最高的渴望。英國著名的科學史專家沃爾夫說過：“巴斯卡顯露了早熟的數學才華，但是，他的科學研究活動受到了宗教思潮的阻礙，直至他壽終正寢。儘管如此，他還是使數學和物理學的許多分支取得了顯著的進展”。

巴斯卡還是一位思想家和散文大師。1656年1月13日到1657年3月24日期間，在朋友們的幫助下，他創作了《Lettres provinciales》，之後又創作了《沉思錄》(Pensées)。這兩部著作思想深邃，文筆雋永，在世界思想文化史上，都是罕見的珍稀瑰寶，充分顯示了巴斯卡傑出的哲學和文學才華。法國大文豪伏爾泰 (Voltaire) 讀了這些作品後，讚歎不已，稱其為“這是歷史上最好的作品”。

## 結束語

雖然巴斯卡終身都沒有經過學校的正規教育，卻在數學和物理學領域取得非常輝煌的成就。這除了他本身具有超人的數學天賦以外，主要與他父親對他採取特殊的教育有關，他從小就得到了嚴謹的科學訓練，培養了他探究問題和解決問題的能力。尤其是父親發現巴斯卡對數學特別癡迷時，立刻就有意識地對他進行數學方面的專門培養。其次，在父親的影響下，巴斯卡很早就進入了主流的數學環境，直接與科學大師們進行對話，接觸到了最前沿的數學成果。尤其是受教於德紮格後，數學素養得到了嚴格的訓練。另外，巴斯卡的性格謙和，容易與人交往，毫

無保留地將自己的研究成果和朋友們共用。即使與笛卡兒產生過矛盾，但是也逐漸得到了化解，使得笛卡兒和費馬一起成爲巴斯卡主要的學術交流夥伴。正是在與這些數學大家們的思想碰撞過程中，使得巴斯卡也成爲了數學史上的一代大師。

1660年，費馬寫信邀請巴斯卡會面，共同探討數學問題。但是他的身體已經虛弱得須持杖而行，甚至連騎馬都坐不穩了，因此，錯過了和老朋友相見的機會。1661年，他的妹妹雅克琳去世，他和朋友們在對待宗教、哲學和科學的看法又總是相左，厭世情緒彌漫了他的整個精神世界。1662年8月19日，他在巴黎與世長辭，享年只有三十九歲，被安葬於巴黎的聖愛基納教堂。

## 參考文獻

1. 吳文俊，世界著名數學家傳記，北京：科學出版社。
2. 梁宗巨，數學家傳略辭典，山東：山東教育出版社。
3. (美) 莫里斯·克萊因著，張理京等譯，古今數學思想，上海：上海科學技術出版社。

—本文作者任教於新疆庫爾勒市石化路華山中學—