

# Emmy Noether的一生 (1882.3.23-1935.4.14)

顏一清

## 一. 楔子

1964年在紐約舉行的萬國博覽會中有一室專門開闢成與數學有關的展覽。其中有IBM所提供,很出色的約十三尺長壁畫。題名為「現代數學名人錄」,列出約從十世紀到當時的數學發展史。早些世紀的以藝術,特別是建築物來表達。從十六世紀以後就列出數學家們的肖像,並附上他們的簡歷與成就。有八十幅左右的人像畫集中在約十四平方呎的面積裡面。其中只有一幅是女士,她便是 Emmy Noether。由照片看來她是一位充滿智慧,有創意而和藹可親的人,不過一點也稱不上漂亮。圍繞著她的肖像有 Joseph Liouville (1809-1882), Georg Cantor (1845-



1918), David Hilbert(1862-1943) 等重量級數學人物。<sup>(1)</sup>

## 二. 家世

Amalie Emmy Noether 在1882年3月23日出生於德國 Erlangen 市的一個猶太家庭裡。父親是 Max Noether, 母親是 Ida Amalia Kaufmann.

Max Noether(1844.9.24-1921.12.13) 是 Erlangen 大學的教授, 為當時的代數幾何學與代數函數論的權威。Max 的祖先從事五金批發。父親 Elias Samuel(1774?-1846)

在 1797 年左右從德國黑森林的北方地區搬到猶太人較容易被接納的 Bruchsal。當時它是 Baden 大公的屬地。1809 年 Baden 大公詔令每一猶太家庭的家長須為他的家族取當地傳統的姓氏。因此 Elias Samuel 就由 Netter(出自 Nathan) 改姓為 Noether(官方紀錄為 Nöther)。他那些未搬出的親戚們仍姓 Netter。他的一子 Hertz 改名為 Hermann Noether。

Hermann 是他家庭中第一個受高等教育的人，他在 Mannheim 的 Klaus School 學過神學，不過後來還是從事祖業。Hermann 的太太 Amalia Würzburger 是 Mannheim 人。她的父親雖然是生意人，可對數學有興趣。Hermann 夫婦生了三男二女。小兒子 Max 不想做生意。Max 不幸地十四歲時得了小兒麻痺症，終其一生都跛腳。所以他大學以前的教育都是在家裡完成的。後來 Max 在海德堡大學學數學，得了無須論文的博士學位，他在那兒教過一陣後 1875 年到 Erlangen 大學教書。

Max 在 1880 年因他的資歷與背景，娶到了 Cologne 非常富有的猶太家庭之女 Ida Amalia Kaufmann (1852, Cologne, -1915, Erlangen)。她有兄弟姊妹十個，有事彼此都很幫忙。Ida Amalia 的祖先幾代都在萊茵低地區。他們因從事牛隻買賣與屠宰業而致富。

Max 與 Ida Amalia 除了 Emmy 外有三個兒子 Alfred(1883-1918), Fritz(1884. 10.7-1928) 與 Gustav Robert(1889-1928)。他們的生活安定，家庭氣氛祥和，並有知識階級的氣息。

## 參. Erlangen 時期

Emmy 小時候功課並不怎麼出色。她有平凡的面孔，還帶一副近視眼鏡。不過老師和小朋友們都知道她聰明，友善，很討喜。

1889 年至 1897 年 Emmy 唸 Erlangen 的女子高等學校。課程內容差不多是現今的中學程度，沒有拉丁文，而德文、法文與數學程度可能高一些。Emmy 也免不了中等階級的習俗，學了鋼琴。可是她的程度只止於彈奏「快樂的農夫」(舒曼的作品，一首初級程度的演奏曲) 的程度而已。她也做家事，但不會喜歡。課餘她喜愛唸英文與法文。她還有一個嗜好：很愛跳舞。她常常巴望有機會參加教授們的家庭舞會。家長們也都囑咐兒子們要邀請 Emmy 跳舞，可是男生對她不感興趣。

1900 年 Emmy 十八歲了。四月她參加 Bavaria 省的英文和法文的教師資格考試。考試成績分成十二等級。第一級最高。Emmy 兩學科的平均分數考到 1.2 級，很不錯。這樣，她擁有英文和法文教師的資格了。但是家庭環境使然吧，Emmy 想深造。依她的個性，她是溫順的，要讀大學在當時是一件違反習俗，非常叛逆的行為。不過時機幫上了忙，德國的大學之門逐漸開放給女生了。最先在 1901 年 Baden 省的 Freiburg 與 Heidelberg 兩大學准許女子入學，直到 1908 年各大學才許可男女同校。Erlangen 大學在 1900 年左右規定「在授課教授同意之下女生才可以旁聽，不得參加考試」。<sup>(1)</sup>

1900 年至 1902 年 Emmy 在 Erlangen 大學旁聽之餘，也準備考 Nürnberg 有好名聲的皇家準古典教育學院的學位考試，以

便取得進大學的資格<sup>(2)</sup>。1903年6月4日她考試通過。過後她在1903/04的冬季學期在Göttingen大學當旁聽生。教授有天文學家Karl Schwarzschild(1873-1916), 數學家Hermann Minkowski(1864-1909), Otto Blumenthal (1876-1944), Felix Klein (1849-1925) 與 David Hilbert。一學期後她回Erlangen, 這時候Erlangen大學已經准許女子入學了。

1904年10月24日 Emmy 得到 Erlangen 大學的入學許可, 登記號碼是468。她只選數學為學習科目。數學屬於哲學院第二部門。入學時, 共有男生46名, 她是唯一女生。比 Emmy 小一歲的大弟 Alfred 也進 Erlangen 大學的化學科。他除了1904/05冬季學期在 Freiburg 外都待在 Erlangen, 並在1909年獲得博士學位。但是在1918年第一次大戰末年的物質缺乏與諸多不便中, 他因體弱早逝了。Emmy 的二弟 Fritz 在 Erlangen 與 Munich 學數學與物理。他在 Aurel Voss(1845-1931) 指導之下拿到 Munich 大學的博士學位。因此, 在1900年代 Noether 家有三個孩子從家裡趕路到 Erlangen 大學上課。Emmy 與 Fritz 也上過他們父親的課。當時 Max Noether 與 Paul Gordan(1837-1912) 教數學部門的主要課程。

在 Gordan 的影響之下 Emmy 做不變量理論的研究, 寫了博士論文“On the construction of the system of forms for the ternary biquadratic forms”(英譯), 發表在 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (又稱 *Crelle's Journal*)134, 1908, pp23-90。1907年12月13

Emmy 以最優等通過博士學位的口試。1908年開始 Emmy 在 Erlangen 大學無薪無職地工作。她一邊為自己做研究, 一邊照顧老父。Max 生病時她就替他上課。這時候她已然決定要終身獻身數學了。1908年她成為意大利 Palermo 數學學會會員, 1909年她又成為德國數學學會 (DMV) 會員。DMV 的年會可以使年輕的數學家們聚在一起交談, 彼此溝通, 也看得到那些大牌們在做些什麼。早些年 Emmy 是與會者中唯一女性。Emmy 很喜歡這種集會, 她說這是在「談數學」。從1909年至1929她一共在 DMV 中演講過九次, 並在1928年, 32年的國際數學家會議中演講了兩次。

Gordan在1910年退休, 繼任者是 Erhard Schmidt(1876-1959)。後來由 Ernst Fischer(1875-1954) 繼任。Fischer 的的確確是 Emmy 的好導師。Fischer 引導 Emmy 從 Gordan 的演算方式的研究轉變成為採用 Hilbert 的抽象代數模式來研究不變量理論。Emmy 與 Fischer 經常「談數學」。他們都住在 Erlangen, 在學校裡也常有見面的機會。可是他們還是很勤快地寫明信片討論數學。通訊期間從1911年持續到1929年。尤其在 Fischer 被徵調當兵的1915年信寫得最勤快也最多。難能可貴的是 Fischer 把這些信珍藏到二次大戰後。

往後 Emmy 走向抽象代數的研究, 對以前寫博士論文那一段時期使用的不變量理論形式化的運算方式不復記憶。當有人提及她的博士論文時她會說「那只是一堆雜碎」。

Emmy在1913年間在維也納待過一陣, 有時她會去拜訪數學家 Franz Carl Joseph

Mertens(1840-1927)。Mertens 的孫子描述他當時對 Emmy 的印象,說:「她像從偏僻地區來的神父般穿及踝的黑長袍,套上難以名狀的外衣,在短髮(當時的女人稀有)上帶著一頂男用帽子,還斜背著皮包,就像帝政時代的鐵路督導員那般。看來她的年紀近三十歲,...」。(1)

1914年5月 Emmy 完成論文“Fields and systems of rational functions.”(英譯)。她承認 Fischer 與她的討論引導了她對抽象代數學的興趣,讓她決定她日後研究的方向與目標。這是在 Fischer 影響之下寫成的第一篇論文。因深入研究 Hilbert 的  $n$  變數不變量的問題,她在當時已經被認為是有關不變量理論的專家了。(6)

#### 四. Göttingen時期

1915年4月底 Felix Klein (1849-1925) 與 Hilbert 邀請 Emmy 去 Göttingen 大學(公立大學)當私講師(Privatdozent, 由學生付學費,不領學校薪水的講師職)的候補者。他們請 Emmy 去 Göttingen 除了她是同行 Max Noether 的女兒,想給她一個工作機會外主要是要借重於她對不變量理論的知識。他們當時在研究一般相對論,很用得著這方面的知識,而 Emmy 也真幫上了忙。

Emmy去 Göttingen 整兩星期後她的母親 Ida Amalia 突然去世了,她早先只是在治療眼疾而已,這很出人意料之外。Ida Amalia 生前操持家務非常節儉,有空她喜歡彈鋼琴自娛。Emmy與 Fritz 是她喜悅的

源泉,但是 Alfred 與 Gustav Robert 體弱多病,常使她憂傷。1915年,即第一次世界大戰第二年,Emmy 爲了多少要照料家,就 Göttingen 與 Erlangen 兩地來回跑。

1915年11月,爲要得私講師資格,Emmy 在 Göttingen 數學學會演講“On transcendental integers”(英譯)。但是因哲學部與歷史部的教授們的反對而申請沒有成功。他們反對的理由是性別問題。他們說:「讓女性當私講師,往後她有資格當教授,這樣她就可以成爲學校評議會會員。評議會會員怎麼可以有女性?」。Hilbert很氣忿地回答他們:「諸位,大學評議會並不是澡堂,爲什麼女性就進不得?」。Hilbert等人向教育當局申訴過,但是沒有用,被駁回。Hilbert 無奈,從1916年冬季學期開始一直到1919年夏天,在他的名下開一些課,但是讓 Emmy 以助教的名義講解課程,不收費。(1)

在第一次大戰世界期間(1914-1918)德國的海上運輸長期遭到英軍的封鎖,德國境內物質非常缺乏。1918年末海軍陸續有叛變,並繼續擴大。到了11月7日,饑餓的人民發動革命,指摘德皇威廉二世領導國家無方。戰事又節節敗退的情況之下,德皇終於11月9日遜位,由剛成立的臨時政府在11月11日11點與協約國簽定停戰協議,於是第一次世界大戰宣告結束。直至1919年8月11日德國國會在威瑪(Weimar)開會,德國才正式爲威瑪共和國。

大戰中參戰雙方死者逾九百萬人,傷者約兩千萬人,他們大都是年輕男子。他們的死傷改變了各國的社會結構。婦女們須得出現

在許多行業中，這使婦女們獲得比戰前更多的平等與自由，她們的社會地位隨著也提高了。

社會形態的改變有利於 Emmy 申請私講師資格了。Emmy 在 1917/18 年間，專注於微分不變量的研究。1918 年，她把結果寫成 “Invariant variational problems” (英譯)，發表在 *Göttinger Nachrichten*, 1918, pp.235-257 上。它便是 Emmy 申請私講師資格的論文。1919 年 5 月 21 日 Göttingen 同仁通過 Emmy 的資格申請，5 月 28 日有論文演講。於是 6 月 4 日她在 Courant (1888-1972), Debye(1884-1966), Hilbert, Klein, E. Landau(1877-1938), Prandtl (1875-1953), Runge(1856-1927) 與 Voigt (1850-1919) 等大人物面前做她申請私講師後的第一堂試課。

在 Emmy 名下的第一個課程是 1919 年 9 月 22 日至 12 月 20 日特別為退伍軍人開的「解析幾何學」。1919 的冬季學期開始 Emmy 有機會開她研究的專長科目了，如高等代數、有窮論、體論、數論、代數數論等。這些課程每星期都有四堂課。

學生們上 Emmy 的課所產生的反應走兩極端。有些學生後來成為有名的數學教授。其中有一個人說他覺得 Emmy 沒有充分準備課程內容。而且學生如果沒有好好預習過，很難跟上她天馬行空式的教法。有一回，上一點鐘要結束的課時他在筆記邊緣塗寫：「好極，已經到十二點五十分了！」。可是有些 Emmy 最出色的學生卻說，上她的課是「很好的經驗」，受益良多。這是因為 Emmy

上課時常以思考與推論方式漸進，以期能達到某一結果。她未必全部說完，以便聽者有發揮的餘地。她不會有頭緒地把概論，定理等從頭到尾清清楚楚地說出來。所以她授課的方式未必能迎合眾人的胃口。

B.L. van der Waerden(1903- ) 在 1923/24 來 Göttingen 前已經是成形的數學家了。他來受教於 Emmy，很快地吸收了 Emmy 的方法，加上他自己的觀念，使抽象代數學得以發揚光大。他寫的「近世代數」是膾炙人口，影響深遠的代數學書。它的內容多少採用了 Emil Artin(1898-1962) 與 Emmy 的授課內容。Van der Waerden 就形容過 Emmy 上課的一個情景：Emmy 要證明 Maschke(1853-1908) 的一個定理。她想以公理與概念的方式漸進，應該寫很少，也用不著運算就可以導出結果來。她事先想過，沒有完全做出來，她以為在課堂上可以推演得出來。但是眼看下課前沒法子完成它，她生氣了，扔掉粉筆，用腳去踩碎它，還叫出：「討厭，我只能用我不喜歡的方式導出這個定理了！」就以傳統的方式無誤地證出 Maschke 定理來。<sup>(1)</sup>

Emmy 上課時常把手帕塞在她的胸口。要用時她會不經心地抽出手帕來，使用完了她又塞回原處。她的頭髮可能早先是夾得好好的，但是上課後一下子這裡一束，那裡一縷地垂掉下來。她又長得胖，穿好的上衣經過上課時手的比畫而變了樣，那一副狼狽相成為上她課的學生們的看頭。

而上課時「正常班」的學生都佔據前座。坐後面的旁聽生半個小時後往往聽不下

去了，便退席。這時候前座的人會回過頭來叫道：「敵人已被擊敗，退卻了！」。

Emmy對不苟同她的想法的人態度相當不友善。她會用她的大嗓門粗魯地，還帶嘲弄的語氣把她的想法直接地說出來而得罪人。但是對須要她幫忙的人她是慈愛而無私的。她會竭她所能去幫助人。她也時常與人分享她的創意。<sup>(1)</sup>

Emmy是一位忠實的朋友兼而是一位嚴苛的批判者。因此她很適合當數學雜誌編輯。她的確也從事 *Mathematische Annalen* 的編輯工作多年，但是她這份工作也是不掛名的，這頗使她傷感。<sup>(3)</sup>

Emmy在1915年赴 Erlangen 奔母喪後又幾次回去奔喪：1918年是她大弟 Alfred，1921年是父親，而1928年是她的幼弟 Gustav Robert。因而她養成一種習慣把她的哀傷、心思都默默地壓在她的心底。可是一看到別人遇到同樣的遭遇她會表達出十分的同情心來。每當非猶太朋友幫助她時她也由衷地表示感激。幾次家人故去後她的親人只剩下二弟 Fritz。他在 Breslau 當數學教授。Emmy 跟他的家庭很親近，也會跟他們一起渡假。Fritz 生有兩男，Emmy 尤其寵愛有數學天份的小姪兒 Gottfried(1915-)。他後來成為數理統計學家，1939年移居美國。Fritz 一家人在1934年因納粹的追逐，移民到蘇俄後 Fritz 在西伯利亞 Tomsk 的「數學力學研究所」當教授。

1922年 Göttingen 大學的自然科學與數學部門向教育當局申請 Emmy 的升等。文件中說「Emmy Noether 無疑是一位很出

色的數學家，不適合當私講師教大班學生的一般課程。她有能力影響一批優秀學生，其中有人甚至於有教授資格。」終於在當年4月6日 Emmy 收到普魯士（地方）科學部長發給她「非文官副教授」（nichtbeamteter Ausserordentlicher Professor）的證書，也就是說，她雖然升任副教授，但是像私講師一樣不支薪。不過 Emmy 還是滿開心的。她寫信給1920年代開始跟她合作，並研究非可換代數的 Helmut Hasse(1898-1979)：「這個冬天我終於可以講授有關超複數，這對於我和學生們都有趣多了。」<sup>(1)</sup> 直到1923年 Courant(他除了數學外組織與管理能力也廣被稱許)，當 Göttingen 大學的主任 (Director) 時替 Emmy 力爭才得到「委任教學」(Lehrauftrag) 的名義，她這才領到少許薪水，一個月在200至400馬克之譜，而且這個「委任教學」每年還得覆審。<sup>(4)</sup>

1930年 Hermann Weyl(1885-1955) 繼任 Hilbert 的教授席。這在當時的德國是最崇高的地位。他認為 Emmy 在數學上各方面都比他強許多，他的職位卻比 Emmy 高高在上，這使他不安。因此他向教育當局爭取過她的名位，也爭取 Emmy 成為 Göttingen 大學科學會會員，但是都沒有成功。<sup>(5)</sup>

Emmy的生活一向很簡樸。她起先無薪，即使在1923年後從國家獲得的薪水也很少。她雖然稍有遺產，但是在她多病的幼弟生前，她幾乎都把錢用在他身上。1933年她被普魯士（地方）政府趕出職位時就靠這份遺產過日子。1934年她受聘美國的 Bryn Mawr 學院，她那些在 Princeton 的 Göttingen

老同事問她：「現在日子可以過得好些了吧！」她說：「那裡，我只花一半，一半要留給姪兒呢。」

有一次下著雨 Emmy 雖然撐著傘，但不怎麼管用，一個學生看不過去說「傘該修了」，她答：「是的，但是單知道沒有用，不下雨時我不會想到它，下雨時我又用得著它。」

Emmy 經常在一間簡陋的餐廳裡同一時間、同一座位上吃她同樣的簡單晚餐。在禮拜天她也會在她閣樓的房間裡煮食，不過這時候差不多都有她的學生們在一起。在 Göttingen，大家稱 Emmy 為“Der Noether” (Der, 男性冠詞) 表示尊敬，而她的學生們被稱為“Noether boys”，她跟學生們被合稱為“Noether family”。她學生們往往從下午就跟她邊散步邊「談數學」，最後落在她的住處吃晚餐，再繼續談數學。

Hermann Weyl 說：「Emmy 這個人就像剛烘培出爐的麵包，暖烘烘的」。<sup>(5)</sup> 她照顧她的學生無微不至，就像母雞呵護小雞般。她的學生遇到攻擊，她是會很兇猛地反擊的。可是她受到委屈，她可以一笑置之。就如，有一次她被「請出」學校的公寓，因為有一批學生提出抗議說：「不願意跟親馬克斯主義的猶太婆共屋頂」，而事實上她在 1918 年左右較親社會民主黨外對政治一向是不干不預的。

## 伍. 指導的學生們

在 Erlangen 時 Emmy 就指導過兩次博士論文。第一次是指導 Hans Falckenberg (1885-1946)。他是 Emmy 父執輩的孩子，

也是弟弟 Fritz 的朋友。他在 1911 年拿到學位。後來當了 Giessen 大學的數學教授。

Emmy 在 Erlangen 與 Göttingen 來回跑的 1915 年間 Landau 介紹給她 Dedekind (1831-1916) 提出的問題：「任何置換群是否可為某一方程的 Galois 群？」她開始想這個問題。剛好那時候 Fritz Seidelmann (1890-) 在 Erlangen 一所學校當講師。早先他在 Munich 大學跟 Friedrich Hartogs (1874-1943) 學過。當時他做出：「給定一群，可求得一四次方程」的特殊情形。他問 Max Noether 是否可以用它寫成博士論文？Max Noether 認為他的題目與 Emmy 研究的課題相近，就介紹給 Emmy。Emmy 建議 Seidelmann 用參數表示法試一試。結果他成功地做出三次和四次方程的一般情形。寫成的博士論文是：“The set of cubic and bi-quadratic equations with affect over an arbitrary field” (英譯)。1916 年付印，他還寫著：「獻給 Emmy Noether 博士」。他以最優成績通過口試，Emmy 跟他一樣，好高興！Emmy 也完成了一篇“Equations with pre-assigned group” (英譯)，*Mathematische Annalen*, vol. 78 (1917/18)。它是這類問題在當時的最佳文獻。

在 Göttingen 大學 Emmy 指導博士論文的第一人是 Grete Hermann (1901-?)，她在 1925 年 2 月 25 日得到學位。過後 Grete 一直很感戴 Emmy 的指導。Emmy 指導的其他 Göttingen 大學的博士學位的學生都是男生。跟 Grete Hermann 差不多時候有 Rudolf Höfzer (1903-1926) 與 Heinrich

Grell(1903-1974)。Rudolf Hölzer 完成論文但未得學位前因肺病在 23 歲病亡。Grell 在 1926 年得學位。後來當 Humboldt 大學教授。Emmy 對 Grell 的評價很高。Grell 對 Emmy 也很感恩。因他, Emmy 的“Ideal differentiation and the difference”(英譯), *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 188, 1950, pp.1-21, 才得以付梓。這是 Emmy 遺留下, 生前未及出版的著述。

Emmy 的另一個學生 Werner Weber (1906-194?) 在 1929 年得博士學位。他在「Dedekind 全集」的編纂及 van der Waerden 的「近世代數」第一版上幫了些忙。

Jakob Levitzki(1904-1956) 在烏克蘭出生, 之後全家移民到巴勒斯坦。他從特拉維夫來 Göttingen 唸書, 經濟情況很差。Emmy 儘力替他申請助教獎學金。後來他拿 Sterling 獎學金在耶魯大學學習。1931 年起在希伯來大學教書。在美國與巴勒斯坦他的表現俱佳。

1930 年經 Emmy 指導拿到學位的有 Max Deuring(1907-1984)。Emmy 對他的期許很高。他寫的「非可換代數」很符合 Emmy 的意思。後來他在 Marburg 與 Hamburg 教書。1950 年後在 Göttingen 教書當到永久教授。清大徐道寧教授是 Deuring 的學生。(博士學位口試:1961 年 12 月 20 日)。

1931 年由 Emmy 指導而獲得博士學位的有 Hans Fitting(1906-1938)。他後來在 Königsberg 大學當講師, 但因骨癌在 1938

年 32 歲去世。至今在代數構造中留有 Fitting's lemma, Fitting's radical 這些名詞。

1933 年 Emmy 指導的學生還有 Ernst Witt(1911-1991)。他因 1933 年 6 月的考試與入營卡在一起, Emmy 又已被停職, 由 G. Herglotz(1881-1953) 當審稿者。<sup>(1)</sup>

中國學生曾炯之 (1898-1940) 的論文題目是“Algebras over function fields”(英譯)。他由 Emmy 指導論文, 但是他的論文口試在 1933 年 12 月 6 日, Emmy 赴美之後。曾炯之後來回中國大陸, 1935 至 1937 年間在浙江大學當教授, 1937 年後在天津北海大學教書, 中日戰爭時他隨校輾轉遷移到四川, 在 1940 年病逝<sup>(6)</sup>。他在代數學上留有 Tsen's Theorem。

Emmy 在 Göttingen 最後指導的學生是 Ottoschilling(1911-1993)。他同時也研究 Hasse 的專長。Emmy 赴美後一年 (1934), 他在 Hasse 所在的 Marburg 大學得到博士學位, 一年後他也移居美國。他最出色的著作是“The Theory of Valuations”(1950)。<sup>(1)</sup>

## 陸. Emmy Noether 與學者們

Göttingen 大學在十九世紀有 Gauss, Riemann, 二十世紀有 Klein 與 Hilbert 等數學大師, 蔚然成爲「數學界的麥加」; 許多國家的數學都想赴 Göttingen 大學「朝聖」一番。第一次大戰後 Göttingen 的數學陣容有 Hilbert, E. Noether, Landau, C. Caratheodory(1873-1950)。Courant (接 Klein 的教授席)、Herglotz、Hermann



Weyl 等人。來 Göttingen 浸淫在 Noether 圈的法國數學家有 A. Châtelet (1883-1960), C. Chevalley(1909-1984), A. Weil(1906- ), Jacques Herbrand (1908-1931)。後者很優秀,但因登法屬阿爾卑斯山失事而早亡。朋友們為紀念他出了一本刊物,其中有 Emmy 生前最後一篇文章“Splitting crossed products and their maximal orders”(英譯)。Actualités Scientifiques Industrielles, Paris, 148(1934)。Emmy 悲嘆:「我不能忘懷 Herbrand 的早逝。」

日本學人從東大來 Göttingen 跟 Emmy 學習的有高木貞治 (1875-1960) 的高足正田建次郎 (1902-1977) 與末綱恕一 (1898-1970)。在 Emmy 的影響之下正田建次郎在 1932 年寫出「抽象代數學」。<sup>(6)</sup> 末綱恕一在 1950 年出版「解析的整數論」等,這些書廣被使用,成為日本代數學家走向國際舞台的誘因之一、二。又,正田從 1935 年至 61 年擔任大阪大學校長。他是 Osaka Journal of Mathematics 與日本數學學會的成立的一位關鍵性人物。

美國學者中有 Solomon Lefschetz (1884-1972), Oswald Veblen(1880-1973), Saunders Mac Lane 等來 Göttingen。Lefschetz 的想法與 Emmy 相近, Veblen 對以後德國數學家移居美國幫了大忙。<sup>(1)</sup> Mac Lane 聽過 Emmy 的課。他與 G. Birkhoff (1911-1996) 合著的“A Survey of Modern Algebra”出過好幾版,是一本著名的代數書。

蘇俄數學家 P. S. Alexandrov(1896-1982) 是莫斯科大學教授。他英、德語都很

流暢,從 1923 年起他經常來德國,尤其幾次到 Göttingen 大學當客座。他跟 Emmy 不但是好朋友,他還很尊敬她。Heinz Hopf(1894-1971) 與 Alexandrov 的交誼很深,他們常彼此溝通想法。他們在拓撲學的代數化上的確受過 Emmy 的影響。又 Alexandrov 在當時赤化的蘇俄可以自由出入蘇俄國境,對東西歐文化,尤其是數學的交流與推展功不可沒。

Emmy 跟蘇俄數學家,如數學家兼北極探險家 Otto Juljewitsch Schmidt (1891-1956), W. W. Stepanov (1889-1950), N. G. Tschebotaröv(1894-1947) 等人也經常有連繫。

1928 年冬天至 1929 年夏 Emmy 應 Alexandrov 的邀請去莫斯科大學當客座。她享受 Alexandrov 與他的朋友們的友誼。回國後她還受到 Göttingen 同仁的羨慕,因為由於她的影響, I. A. Arnold(1900-1984) 與 L. S. Pontrjagin(1908-1988, 1935 當莫斯科大學教授) 分別用德文發表了他們心得的文章。<sup>(1)</sup>

Emmy 向來不跟人爭奪著作優先發表權。她甚至由她的構思而誘導出學生的結論成為學生獨有的作品。像在 1914 年, Kurt Hentzelt(?-1914) 在 Erlangen 完成論文,但是論文還沒有發表,他就被調去當兵,那年十月傳出他出任務失蹤的消息。在 1921 年的 DMV 的年會中 Emmy 簡述 Hentzelt 論文的內容,並替他登載在 Mathematische Annalen 上。題名為“On the theory of polynomial ideals”(英譯)。1923 年冬到 1924 年夏, Emmy 根據 Hentzelt 的概念得到

很好的結果，使在課堂上講起。1924年秋天 van der Waerden 來 Göttingen，他也從 Hentzelt 的論文中得到啓示，導至 Emmy 同樣的結果。後來他由 Emmy 的學生 H. Grell 口中才知道有這一回事。Emmy 沒跟他爭優先權。van der Waerden 便把結果發表在 *Mathematische Annalen* vol. 96(1927) 上，是爲“Theory of zeros of polynomial ideals”(英譯)。在代數幾何學上它是一篇有份量的論文。Emmy 只是在給 Hasse 的信中慨嘆過：「我的方法像蔓藤般，到處爬行。」<sup>(1)</sup>

## 柒. Göttingen時期的黃昏

1929年 Rockefeller 基金會捐款在 Göttingen 大學蓋成新大樓，裡面有一些小辦公室是給講師和助教的。Emmy 分得了特別的一間，蠻有校方酬庸她多年來優異的教導的意思。

1930-32年間 Göttingen 大學出版「Dedekind 全集」。Dedekind 留下五十來本備忘錄。要整理這些著實不容易。編纂者是 Robert Fricke (1861-1930), Öystein Ore (1899-1968) 與 Emmy Noether。Fricke 只做了少許，其他都由 Ore 與 Emmy 所完成。<sup>(1)</sup> 由此 Emmy 對 Dedekind 的著作更加了解，對他的人格也就更加崇敬，她說：「Dedekind 都沒有犯過錯誤。」<sup>(6)</sup>

1932年 Emmy 與 Artin 因他們在數學上的貢獻同時被頒授 Alfred-Ackermann-Teubner 紀念獎。同年 Göttingen 大學的代數學家們慶賀 Emmy 的五十大壽。這

一年九月在 Zurich 有國際數學家會議。它像一個大家族的會合，與會者有 420 人。9月 7日 Emmy 演講“Hypercomplex systems in their relations to commutative algebra and number theory”(英譯)。開完會後不久 Göttingen 的好日子便過去了，麻煩事開始發生。

早在 1929 年 10 月 29 日，紐約證券市場大暴跌引發世界性大蕭條。第一大戰後德國的繁榮仰賴美國的信用貸款與活躍的國際貿易。這兩項財源涸竭後德國人民窮困不堪，對威瑪政府的溫和派作風也就失去了信心。於是希特勒 (1889-1945) 領導的國家社會黨 (簡稱納粹黨) 及共黨的勢力趁機而盛。到 1932 年德國境內失業人口高達六百萬人以上，人民對政府的失望更甚。同年 11 月納粹黨在德國國會選舉中大舉得勝，獲可觀席位。1933 年 1 月 30 日當時的威瑪政府總統興登堡 (1847-1934, 第一次世界大戰時德國名將) 無奈，任命希特勒爲總理，組成聯合內閣。同年 2 月 27 日希特勒假借國會大廈被共黨縱火，搜捕共黨，除去異己，攫取獨裁權。4 月 1 日納粹黨公然採取迫害猶太人政策：抵制猶太人經營的生意；在公職人員方面，凡是猶太人及有猶太血統 (追溯到祖父或祖母是猶太人) 的人都在被迫退職之列。<sup>(2)</sup> 4 月 2 日教育局發令禁止 Emmy Noether 在 Göttingen 大學教書。理由是她是「危險人物」，說她曾經借房間給左翼學生開會過。遭遇到同樣禁令者有 Courant, Max Born (1882-1970, 1954 年諾貝爾物理學獎得主) 與 James Franck (1882-1964, 1925 年諾貝爾物理學獎及第一次大戰鐵十

字架勳章得主)。Otto Neugebauer (1899-1990), Landau與 Paul Bernays (1888-1945) 先被停止一切教學與行政工作。他們都是猶太人。Hermann Weyl 繼任 Courant 為數學部門主任。

## 捌. 赴Bryn Mawr女子學院

1933年間世界性不景氣還在持續中。在歐美各國一職難求。不過 Weyl 積極為 Emmy 安排在美國的出路。據 P. S. Alexandrov 說, 他當時也替 Emmy 奔走莫斯科大學的差使, 但是進行得很緩慢, Emmy 等不住, 終於接受 Weyl 給她找到的美國 Bryn Mawr (女子) 學院客座教授一年的職位。<sup>(4)</sup> 薪水由 Rockefeller 基金會支付。1933年10月底 Emmy 整裝赴美。

在美國賓州東南部的 Bryn Mawr 學院1933年秋季開學典禮時 Park 校長告訴師生將有一位最出色的德國女學者 Emmy Noether 蒞校教書。她的名字對學數學的人來說如雷貫耳, 大家都很振奮。學校當局為 Emmy 要來教書還募款設立「Emmy Noether 獎學金」。當時的數學系系主任是 Anna Pell Wheeler(1883-1966)。她在1906/07年間在 Göttingen 待過, 1910年得 Chicago 大學博士。Wheeler 太太的安排是, 讓拿 Emmy Noether 獎學金的 Marie Weiss(已得 Stanford 博士, 1903-1949) 與在 Bryn Mawr獎學金之下攻讀博士學位的 Ruth Stauffer(1910-) 跟隨 Emmy 讀書。她們師生之間可能須要一段緩衝時期, 等到 Emmy 準備妥當方始。起初學生沒有碰過抽

象代數。Emmy 讓她們從 van der Waerden 的「近世代數」第一冊學起, 還唸 E. Hecke 的“Theory of Algebraic Numbers”。學生們對德文名稱的英譯感到困惑。Emmy教她們以德文專有名詞來了解。這樣, 她們德、英文並用, 結果還蠻好。Emmy上課就像開討論會, 好像她也是學生之一, 大家一起討論, 解答。兩位女生覺得很受用。<sup>(2)</sup>

1934年夏天 Emmy 回德國看弟弟 Fritz 一家人與老朋友。那裡的政治氣候越來越險惡。有些朋友甚至於迴避 Emmy。Fritz 是猶太人, 被迫從 Bruslau 大學退休。他倒是拿到了退休金。為了兩個兒子的前途, Fritz 打算移民到蘇俄西伯利亞。<sup>(1)</sup>

Emmy在美國第二年的差使還沒有著落。不過朋有們應該會幫忙。看來她再回德國的機會很渺茫。她便清理自己在德國的財物, 夏天過後又回美國, 並參加美國數學學會。<sup>(6)</sup>

為了要獲得學人的支持留住 Emmy, Bryn Mawr 的 Jacob Billikopf 透過數學家 Arnold Dresden 請 Solomon Lefschetz, Norbert Wiener(1849-1964) 與 George D. Birkhoff(1884-1944) 表示對 Emmy 的意見。他們都齊口稱讚 Emmy 是至今最優秀的女數學家, 理當給她留任的機會。不過他們也有共識, Emmy 不適合教大學部課程。

至於經費方面, 有 Emmy 的朋友典當物品獲得1700美元, 他願意捐出這筆錢來。Princeton高等究所願意負擔1500美元做為 Emmy 每星期去 Princeton 授課的報酬, 而 Bryn Mawr 付給 Emmy 的年薪是3000美元, 因此在 Rockefeller 基金會答應

補助2800美元的情況下 Emmy 在 Bryn Mawr 學院從1935年至1937年的薪水便有眉目了。<sup>(6)</sup>

在 Bryn Mawr 的第二年, Emmy 多出兩名學生。一名是 Grace Shover(1906-), Grace 跟 Mac Duffee 學過抽象代數學, 這回她拿到1934/35年 Emmy Noether獎學金來做博士後研究。另一名是 Olga Taussky (1906-1995)。Olga 是 Emmy 在 Göttingen 的舊識, 維也納大學博士。她本來早一年就有 Bryn Mawr 外國人獎學金, 但 Bryn Mawr 因財務困難, 延後一年。剛好 Emmy 又在 Bryn Mawr, Olga 便拖延一年她稍後才獲得的劍橋大學 Girton 學院的三年獎學金, 先來 Bryn Mawr。<sup>(6)</sup>

Olga 早年是奧匈帝國子民。第一次大戰後她的國家獨立, 她便成為捷克人了。<sup>(7)</sup> 她在1930年的 DMV 與 Emmy 相識。那時候她已是漸露頭角的數學家了, 專長是 Class field theory。剛好 Göttingen 大學打算在1932年出版 Hilbert 的數論第一冊來慶賀他的七十大壽, 急需 Class field theory 方面的年輕專家來整理 Hilbert 的資料。Courant 便在1931年至1932年6月間請 Olga 來當編纂者之一。在這期間 Emmy 與 Olga 常有接觸的機會。那時候 Emmy 老嫌 Olga 的德語帶奧地利腔。不過這回她們在異鄉相逢, Olga 的德語 Emmy 聽來都覺得親切了。<sup>(6)</sup>

Emmy 與她的四名研究生一起討論功課, 一起玩, 彷彿她又組成了一個 Noether 家庭。有時候她們會邊談邊過田野, 越過鐵

軌。Emmy 體態臃腫, 行動可還蠻靈活哩。最後她們會聚集在某個人的住處或是 Wheeler 太太的客廳。Wheeler 太太跟她們也都很合得來。<sup>(2)</sup>

1934年2月起 Emmy 每星期二一早便搭火車去 Princeton 教書。Olga 來後間或陪 Emmy 一起去。有時候四個女生搭 Wheeler 太太的便車去聽講。據 Olga 說, Emmy 星期一給她們上什麼課, 星期二就去 Princeton 講這些, 等於她都預演過了。Princeton 的聽眾差不多是研究員以上, 他們習慣於實際演算, Emmy 的抽象討論法對他們還是新穎的。教完課後 Emmy 經常與 Weyl(1933年來 Princeton) 與 R. Brauer(1934年來 Princeton) 相聚。<sup>(6)</sup>

Emmy 對 Olga 是滿任性的, 她會對 Olga 使性子。還會批評 Olga 這個那個, 再責備 Olga 在乎她那些話。Olga 這個人也比較敏感, 她總覺得 Emmy 在美國這一陣與在 Göttingen 時不一樣, 好像有什麼心事積壓在她心裡。

原來 Emmy 身體有毛病, 她想拖到夏天回德國去治療。她跟 Bryn Mawr 的醫生商量的結果, 醫生勸她趁早開刀治療才好。<sup>(6)</sup>

47年後 Grace Shover 回憶起1935年3月31日至4月14日的事: 那時候, 學校正放春假, 宿舍關閉, 大家各自散了。Grace 住靠近學校的朋友家。3月31日 Emmy 找 Grace 陪她去太平洋城看在那裡的 Olga, 三個人談得很開心。過後 Grace 有德國來的朋友, Grace 在4月7日(禮拜天)傍晚便帶她去見 Emmy。朋友與 Emmy 用德語談故國

事。但是在4月8日 Wheeler 太太告訴女學生們 Emmy 當天進 Bryn Mawr的醫院要開刀切除子宮瘤。<sup>(2)</sup> Emmy離家赴醫院前被要求寫出一份名單捐贈她的所有物以備萬一。Olga與 Grace 也都在名單之內。<sup>(6)</sup> 4月9日四名女生們去醫院看 Emmy 並送她“Town and Country”的複印本。10日 Emmy 開刀,聽說過程很順利,Emmy還高興只取出病灶(一個大卵巢瘤),不必割除其他部位。13日女生們想去探病房,但是還謝絕訪客。14日是星期天,大家都在宿舍裡,想著 Emmy 的病大概快好了。突然間有 Ruth 的電話: Wheeler太太來電話告訴 Ruth, Emmy 的病況發生變化,她因栓塞(embolism)剛剛斷氣。這真是青天霹靂,女孩子們聽後當夜無法合眼。<sup>(2)</sup>

4月7日 Emmy 還發信給 Hasse, 長篇討論 Ruth 的論文。但是 Hasse 又收到 Fritz Noether 4月15日由柏林寄的信,告訴他姊姊 Emmy Noether 在4月14日過世了。<sup>(1)</sup>

## 九. 終局

1935年4月15日的紐約時報簡略報導 Emmy 去世的消息。當天的 New York Herald Tribune 刊載得多一些。<sup>(1)</sup>

4月18日 Emmy Noether 的遺體在火化前, Bryn Mawr學院 Park 校長的客廳裡舉行了一場 Quaker 教的告別儀式。在柔和哀傷的音樂中 Emmy 的德國和美國的少數知己,如 Weyl, Brauer, Wheeler 太太和 Olga 等以各自的語言向她告別。骨灰埋

在 M. Carey Thomas 圖書館的迴廊磚道底下,與首任校長 M. Carey Thomas 的骨灰為鄰。<sup>(6)</sup>

4月19日 S. Lefschetz 告訴在哥倫比亞大學開會的美國數學學會會員 Emmy Noether去世的消息,大家起立默禱一分鐘。

4月26日 Emmy Noether 逝世紀念禮拜在 Bryn Mawr 的 Goodhart 禮堂舉行。許多人來參加,由 Hermann Weyl 用英語很感性地說及 Emmy Noether 的生平與著述。<sup>(6)</sup> 他說 Emmy 是很有創意且影響眾人的代數學家。她並不是上蒼的巧手用粘土塑造而成的人,而是一個石塊由祂吹進創造的生命力而成的人。她心地善良,不知惡為何物。<sup>(5)</sup> 他的演講詞附上 Emmy 的照片在第二次大戰後分贈給連繫到的 Emmy 的親友們。<sup>(1)</sup>

愛因斯坦(1879-1955)在5月1日投稿給紐約時報編輯,題名為「故 Emmy Noether」,內容是:「人類生而為食賣力,有一些人得天獨厚,可免去這一份勞力,他們便去追逐人世間享受。在他們的下意識裡認為這便是人生中最值得追求的目標。幸而有少數人從他們生命的早期就認定人類最完美的經驗不是來自外界,而是由個人內心的感覺、思想與行為啟發出來。這些人便是真正的藝術家、做研究的人與思想家等。這些人的一生不管是否多不起眼,他們所得到的成果是這一代傳給下一代最珍貴的貢獻。

幾天前 Emmy Noether 教授去世了,享年53歲。她是代數界的奇芭,女性受高等教育以來最傑出的學者。她在代數領域中發現的概念式方法證實可使現代代數學發展起

來。她在 Göttingen 大學教學多年，雖經 Hilbert 等人的極力爭取，於公無法取得她該有的名位。但是她還是無怨無悔地教導，影響週遭的學生與學者。可是，她無私的奉獻所換得的報酬卻是因猶太人而被停止教學，讓她失去維持簡單的生活與做研究的機會。幸好經有識人士的安排她得以在美國 Bryn Mawr 學院與 Princeton 執教。由於同事們的友愛及學生們的愛戴，使她的晚年過得快樂、充實。」<sup>(8)</sup>

Mathematische Annalen 雜誌社在6月21日收到 van der Waerden 的「Emmy Noether 事略」，便登載在該雜誌 111 卷 (1935)pp.469-476 上。van der Waerden 在文章中給 Emmy 在學術上的成就定位。<sup>(3)</sup>

1935年9月5日莫斯科數學學會在莫斯科開「Emmy Noether 追悼會」。在 Tomsk 大學的 Fritz Noether 也參加。與會者還有來莫斯科參加第一屆國際拓撲學會的學者們。主席 P.S. Alexandrov 告訴大家 Emmy Noether 在4月14日去世。眾人起立默禱後 Alexandrov 生動地描述他所認識的 Emmy。<sup>(4)</sup>

9月25日 DMV 的年會中祕書告訴大家 Emmy Noether 是近年內去逝的第十四位數學家。會員們全部起立悼念。從此 Emmy Noether 便從 DMV 除名了。

Emmy 所指導論文的最後一名 Ruth Stauffer 後來轉由 Brauer 指導，在1936年拿到博士學位。她離開數學界，在賓州政府做研究員，但還是稱讚 Emmy 的教學法對她處理資料有幫助。<sup>(2)</sup>

Emmy 在 Bryn Mawr 的其他學生如 Marie Weiss 在 Tulane 大學 Newcomb 學院教書，她寫了廣被使用的“Higher Algebra for the Undergraduate”(1949)。在序文中她強調 van der Werden 等人給她的影響。第二版還沒問世她就去世了。<sup>(6)</sup>

Grace Shover 在美國大學 (American University) 教書。1936年她去 Oslo 參加國際數學家會議時 Courant 特地給她介紹信，她便取道 Göttingen 會見 Hilbert 夫婦與 Hasse。為的是這些 Emmy 的故舊很想知道 Emmy 在美國最後一年來的情況。在大會中 Grace 也會見了 Fritz Noether。<sup>(2)</sup>

Olga Taussky 在1938年9月與 John Todd 在英國結婚。夫婦從1957年開始在美國加州理工學院執教一直到退休。<sup>(8)</sup> Olga 於1995年去世。她生前在代數學上的表現很出色。

1945年第二次世界大戰結束。一切逐漸回復正常，學術交流更是沒有國界。抽象代數學以 Göttingen 精神 (其中包括 E. Artin 與 Emmy Noether 等) 繼續發展開來。德國學術界開始為當年被放逐的學人 (其中數學家最多) 做一些補償工作。為 Emmy Noether 做的有:1957年 Erlanger 大學慶祝 Emmy Noether 得博士學位五十週年紀念。1960年 Erlangen 市更以一條新住宅區的街名命名為 Noether Strasse, 來紀念 Noether 父女。1982年是 Emmy Noether 誕生一百週年。2月27日 Erlangen 數學研究所舉行 Noether 紀念碑揭幕典禮。Erlangen 市還建立一所男女合校，強調數學、科

學、現代語言學的「Emmy Noether 高中 (Gymnasium)」。<sup>(20)</sup>

在美國,1982年3月17日至19日 Bryn Mawr 學院在女數學家學會贊助之下舉辦了「Emmy Noether 百年誕辰紀念會」。有九場演講,還有 Emmy 當年在 Bryn Mawr 的學生與 Gottfried Noether 講述他們所認識的 Emmy Noether。這些都付印成冊為“Emmy Noether in Bryn Mawr”, Springer Verlag, New York, 1983。會後 Grace Shover Quinn 把她掛看的首飾, Emmy 的遺物, 取下轉送給 Gottfried 的獨生女 Monica 做為姑婆 Emmy 的紀念品。<sup>(2)</sup>

這些, 如果 Emmy 地下有知, 一定覺得很窩心的吧。

據 van der Waerden 在1924年後的了解, Emmy 看一個定理或課題須得把它抽象化, 在她的心目中變成透明的架構她才能夠把握它。她只能以概念而非公式來思考, 所以也想出概念化的形式來, 它可適用於一般化的數學理論。而她所採用的工具便是代數與算學。<sup>(1)</sup>

Emmy Noether 早年 (1907-1919) 的作品第一篇是在 Gordan 完全以運算方式的指導之下完成的博士論文。不久她受 E. Fischer 的影響, 被 Hilbert 的思考方式所吸引, 完成一些研究。如, 有關 differential invariants 的論文。它在一般相對論上是很好用的文獻。在這期間她最重要的工作是:「給定一 Galois 群, 求出方程式」。

1919年第一次世界大戰後 Emmy 開始自己摸索研究的方向。在1920年她與 W.

Schneider 完成論文“Modulu in nichtkommutativen Bereichen, ins besondere aus Differential-und Differenzenausdrücken” Math Zs 8 (1920) pp.1-35。這是她往後一連串一般 ideal 理論的先聲。

1927年後 Emmy 研究的方向轉向不可交換系統的理論上。她在還有充沛創意中去世, 發表的論文共有44篇。<sup>(6)</sup>

## 參考文獻

1. Auguste Dick, Emmy Noether, Birkhäuser, Boston, 1981.
2. Emmy Noether in Bryn Mawr, Springer Verlag, New York, 1983.
3. B. L. van der Waerden, Obituaries of Emmy Noether, Mathematische Annalen 111, 1935, 469-476.
4. P. S. Alexandrov, In memory of Emmy Noether, Memorial adress delivered before the Mathematical Society of Moscow, Moscow, September 5, 1935.
5. Hermann Weyl, Emmy Noether, Scripta Mathematica III, 3, 1935, 201-220.
6. Emmy Noether, A Tribute to Her Life and Work, edited by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker Inc. 1981, New York and Basel.
7. Albers Alexanderson, Mathematical People (Profiles and Interviews), Birkhäuser, Boston 1985.
8. Albert Einstein, The Late Emmy Noether, The New York Times. May 4, 1935, 12.

—本文作者任教於輔仁大學數學系—